DOI: 10.47682/2675-6552.v1n1p73-81 - ISSN: 2675-6552
Volume 1 / Número 1 / Ano: 2020. p. 73-81

Revista Interdisciplinar de Pesquisas Aplicadas
RINTERPAP

O EFEITO DA TORRE DE HANÓI PARA A APRENDIZAGEM DO PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA SOB A PERSPECTIVA DA TAXONOMIA DE BLOOM

THE EFFECT OF THE HANOI TOWER ON LEARNING THE FINITE INDUCTION PRINCIPLE FROM THE BLOOM TAXONOMY PERSPECTIVE

[1]Mateus Mendes Mangela
[2]Angélica Brandão Rossow
[3]Luiz Henrique Lima Faria
[4]Julia Kerkoff Ladeira

[1]IFES – Instituto Federal do Espírito Santo. Email: mateus.magela@ifes.edu.br
[2]IFES – Instituto Federal do Espírito Santo. Email: angelica.rossow@ifes.edu.br
[3]IFES – Instituto Federal do Espírito Santo. Email: luizlima@ifes.edu.br
[4]IFES – Instituto Federal do Espírito Santo. Email: juliakladeira@gmail.com

Artigo aceito em 03/08/2020.

Resumo

O presente artigo é o resultado de uma pesquisa sobre o ensino do Princípio da Indução Finita (PIF) utilizando a Torre de Hanói (TH) como objeto de aprendizagem, sob a perspectiva da Taxonomia de Bloom (TB) desenvolvido com estudantes dos cursos Técnicos Integrados ao Ensino Médio do Ifes – Campus Cariacica realizada pelo Grupo de Pesquisa Práticas Ativas no Ensino de Matemática (GPPAEM). A aplicação dessa pesquisa contou com a participação de um aluno do ensino médio na modalidade de monitor auxiliando os pesquisadores nas atividades. Embora haja trabalhos de pesquisa que abordem o uso da Torre de Hanói aplicado no ensino de matemática, observa-se uma carência de trabalhos com esse tema apoiados em uma teoria de aprendizagem. Motivado pelo interesse de preencher essa lacuna, a pesquisa baseou-se na TB para identificar a evolução das habilidades referentes ao aprendizado do PIF utilizando a TH. A pesquisa foi realizada por meio da coleta e análise de dados experimentais resultados da experiência de jogo dos alunos com a TH por meio da aplicação de um pré-teste onde os alunos tiveram apenas a instrução do PIF de modo teórico em uma aula expositiva e um pós-teste onde a instrução do PIF foi mediada com o uso da TH. Os resultados mostraram que a diferença entre os resultados das aulas expositivas e das aulas utilizando a torre de Hanói foram de 4,49% para o nível “lembrar”, 7,82% para o nível “entender” e 9,52% para o nível “aplicar”.

Palavras-chave: torre de Hanói; taxonomia de Bloom; princípio da indução.

Abstract

This article is the result of a research on teaching the Principle of Finite Induction (PIF) using the Tower of Hanoi (TH) as a learning object, under the perspective of Bloom's Taxonomy (TB) developed with students from the Integrated Technical courses to Ifes High School - Campus Cariacica carried out by the Research Group Active Practices in the Teaching of Mathematics (GPPAEM). The application of this research had the participation of a high school student in the form of a monitor, helping researchers in their activities. Although there are research works that address the use of the Tower of Hanoi applied in the teaching of mathematics, there is a lack of studies on this theme supported by a learning theory. Motivated by the interest to fill this gap, the research was based on TB to identify the evolution of skills related to the learning of PIF using TH. The research was carried out through the collection and analysis of experimental data results of the students' game experience with HT through the application of a pretest where the students had only the instruction of the PIF in a theoretical way in an ex-positive class and a post-test where the PIF instruction was mediated with the use of TH. The results showed that the difference between the results of the lecture and the classes using the Hanoi tower was 4.49% for the “remember” level, 7.82% for the “understand” level, and 9.52% to the “apply” level.

Keywords: Hanoi tower; Bloom's taxonomy; principle of induction.

1 INTRODUÇÃO

Pesquisas realizadas em larga escala nos Estados Unidos e Canadá, realizadas por Wynn (1990), apontam que as competências matemáticas abaixo da média nos anos iniciais da escolarização estão associadas a risco elevado de que essas habilidades não evoluam no término dos anos escolares. Esse fator isolado mostrou mais influência na determinação do baixo desempenho em matemática do que a família, habilidades socioemocionais, inteligência e leitura. À vista disso, esse projeto de pesquisa busca encontrar estratégias didáticas para melhorar o ensino e a aprendizagem de Matemática, bem como contribuir na formação de professores atuantes no ensino básico de Matemática.

Baseando-se no histórico do uso dos recursos didáticos na educação, pode-se dizer que as transformações sociais e políticas mundiais e o desenvolvimento da psicologia trouxeram consigo uma maior preocupação com o papel da educação, ressaltando a importância dos estudos sobre o desenvolvimento infantil na aquisição do conhecimento, isso fez com que surgissem teorias pedagógicas que justificassem o uso de materiais concretos em sala de aula que com o passar dos anos tomaram aspectos diversificados. Recurso didático é todo e qualquer material utilizado como auxílio no ensino-aprendizagem do conteúdo proposto para ser aplicado pelo professor a seus alunos.

Dessa forma, o estudo aqui proposto se justifica pelo entendimento de que o uso de materiais concretos no ensino de matemática, permitem aos estudantes, experiências reais à medida que este tem contado com os materiais, ora realizando medições, ora descrevendo ou comparando com outros de mesma natureza. Além disso, permite experiências no campo do raciocínio lógico por meio das diversas maneiras de representação que possibilitam abstrações empíricas e abstrações reflexivas, podendo evoluir para generalizações mais complexas como no caso do Princípio da Indução Finita.

Este estudo está estruturado da seguinte forma: 1 – a presente introdução que contextualiza o tema abordado. 2 – O referencial teórico que traz os dois fundamentos teóricos do presente trabalho, que são o instrumento didático Torre de Hanói e a Taxonomia de Bloom. 3 – A metodologia que apresenta a classificação do trabalho e os métodos utilizados para o alcance dos objetivos do estudo. 4 – A análise de dados que apresenta os resultados da aplicação do método sobre os dados. 5 – A conclusão que apresenta a discussão sobre os resultados, contribuições e limitações deste estudo.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1. A APRENDIZAGEM DO PRINCÍPIO DA INDUÇÃO E O INSTRUMENTO DIDÁTICO TORRE DE HANÓI

As ciências naturais usam em determinadas situações o método da indução empírica para formular leis que governam certos fenômenos a partir de muitos experimentos. Essa metodologia, embora não seja uma demonstração formal, é frequentemente aceitável, mas na Matemática a validade de um teorema ou proposição se estabelece de modo totalmente

DOI: 10.47682/2675-6552.v1n1p73-81 - ISSN: 2675-6552

diferente. Segundo Simmons, há um abismo entre "provavelmente verdadeira" e "absolutamente certa". Na Matemática é necessário um argumento lógico certificando que determinada proposição envolvendo números naturais seja verdadeira sempre, verificar que certa afirmação é verdadeira para muitos casos particulares não nos permitirá concluir que ela é válida.

Com efeito, dada a expressão $\delta(\mathrm{n}) = \mathrm{n}^2 - \mathrm{n} + 41$, consideremos a seguinte afirmação: para todo valor de inteiro positivo de n, o valor de $\delta(\mathrm{n})$ é um número primo. Para $n = 1$ temos que $\delta(\mathrm{n}) = 41$. Para $n = 2$, $\varphi(\mathrm{n}) = 42$, para $n = 3$, $\varphi(\mathrm{n}) = 47$. É possível verificar que a afirmação é verdadeira para os primeiros 40 (quarenta) valores de n. Mas, para $n = 41$, temos que $\varphi(\mathrm{n}) = 1681$, que não é primo. Note que nesse caso a busca por um contra exemplo se esgotou de maneira relativamente rápida, mas essa caçada pode perdurar por milhões, bilhões e até mesmo uma infinidade de casos sem uma conclusão. Por isso, é necessária uma ferramenta, uma estrutura de raciocínio lógico, que nos permita varrer todas as infinitas possibilidades para os valores de n. Sendo assim, considere a seguinte sentença:

$$P(n)\colon 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Como verificar sua validade para todo valor de n natural? Evidentemente, é impossível verificar todos os infinitos casos. Para demonstrar esse tipo de sentença em Matemática, aplicamos o Princípio da Indução Finita (PIF), que em analogia à situação das peças de dominó, mostrar que todas as peças caem, basta mostrar que a primeira cai e que, quando qualquer uma peça cai, a seguinte também é derrubada. O PIF consiste em verificar duas coisas:

1. (Base da Indução) $P(\mathrm{n}_0)$ é verdadeira;

2. (Passo Indutivo) Se $P(\mathrm{n})$ é verdadeira para algum número natural $n > \mathrm{n}_0$, então $P(\mathrm{n} + 1)$ também é verdadeira.

Na base indutiva, devemos verificar se a propriedade é válida para um valor inicial $n = n_0$. O passo indutivo consiste em mostrar como utilizar a validade da propriedade para um dado valor n, chamado de hipótese de indução, para provar a validade da mesma propriedade para o número natural seguinte $n + 1$. Uma vez verificados a base e o passo indutivo, temos uma cadeia de implicações assim como uma fila de dominós.

$P(\mathrm{n}_0)$ é verdadeira (base) $\rightarrow P(\mathrm{n}_0 + 1)$ é verdadeira

$\rightarrow P(\mathrm{n}_0 + 1)$ é verdadeira

$\rightarrow P(\mathrm{n}_0 + 1)$ é verdadeira

...

De modo que $P(\mathrm{n})$ é verdadeira para todo número natural $n > n_0$.

Voltando a sentença $P(n)\colon 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, vamos mostrar que a sentença $P(\mathrm{n})$ é verdadeira para todo número natural. Observe que $1 = \frac{1(1+1)}{2}$, logo $P(1)$ é verdadeira para $n = 1$ (base de indução). Agora, supondo que $P(n)$ é verdadeira para $n = k$ (hipótese de indução):

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

DOI: 10.47682/2675-6552.v1n1p73-81 - ISSN: 2675-6552

Somando k *+1* em ambos lados da igualdade, obtemos:

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$
$$1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+\frac{2(k+1)}{2}$$
$$1+2+3+\cdots+(k+1)=\frac{k^2+k+2k+2}{2}=\frac{k^2+3k+2}{2}$$
$$1+2+3+\cdots+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$
$$1+2+3+\cdots+(k+1)=\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

Daí, podemos observar que $P(\mathrm{n})$ é verdadeira para $n = k + 1$. Portanto, $P(\mathrm{n})$ é verdadeira para todo número natural.

O PIF é poderosa ferramenta aplicada na demonstração de teorema no campo da Teoria dos Números e possui um aspecto de alta abstração. Segundo Ferraz e Belhot (2010), é mais fácil atingir altos graus de abstração de um conteúdo a partir de estímulo do desenvolvimento cognitivo linear, isto é, a partir de conceitos mais simples para os mais elaborados.

Esse conjunto de ideias está muito presente na ideia da base indutiva do PIF. Como instrumento de estímulo, vamos utilizar nessa pesquisa um jogo intitulado Torre de Hanói. Esse jogo é apresentado de maneira lúdica, como uma lenda ocorrida em um mosteiro na Índia. Nele deparamos com uma necessidade da construção de um método para resolver problemas: iniciando de casos mais simples em seguida construir possíveis generalizações. Neste jogo, inventado pelo matemático francês Edouard Lucas em 1833, o objetivo é passar os discos organizados em ordem crescente de tamanho (raio), de cima para baixo, de uma haste para outra, na mesma ordem, e efetuando o menor número de movimentos possíveis. Duas regras devem ser seguidas:

- apenas um disco pode ser movimentado por vez;
- ele não pode ser colocado sobre um disco menor (menor raio).

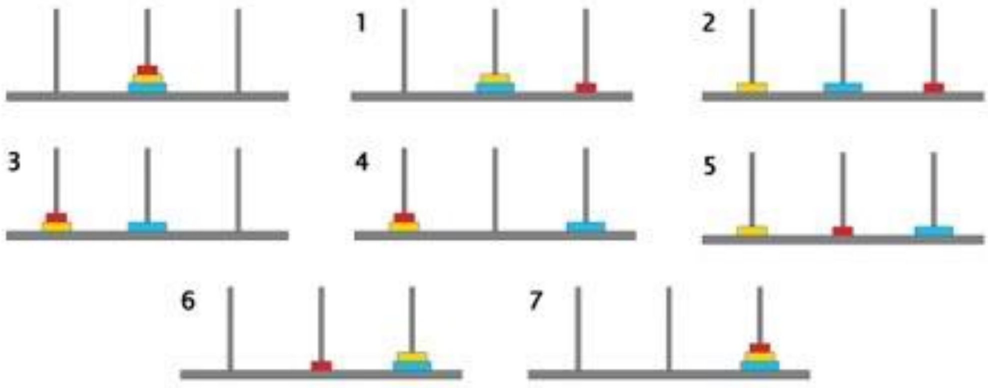
Figura 1. Torre de Hanói

Fonte: Arquivo dos autores

A seguir temos um esquema demonstrativo para a solução da Torre de Hanói com 3 (três) discos.

DOI: 10.47682/2675-6552.v1n1p73-81 - ISSN: 2675-6552

Figura 2. Esquema Torre de Hanói



Fonte: Desenvolvido pelos autores

Agora, imaginemos uma torre com *n* discos. Imagine também que sabemos resolver o problema com $(n - 1)$ discos. Podemos transferir os $(n - 1)$ discos (base indutiva) para uma haste vazia. Depois passamos o disco maior para a outra haste vazia. Por fim, transferimos os $(n - 1)$ discos sobre o disco maior. Dessa forma, podemos resolver o problema com *n* discos.

Voltemos a falar da quantidade mínima de movimentos necessários para resolver a torre. Chamaremos de T_{n} a quantidade mínima de movimentos para resolver o problema para *n* discos. Assim, precisamos de T_{n-1} movimentos para transferir os (n – 1) primeiros discos, mais um para transferir o disco maior e mais T_{n-1} para colocar os (n – 1) discos sobre o disco maior. Portanto,

$$T_1 = 1$$
$$T_n = 2T_{n-1} + 1, \text{ para } n \geq 2 \; (eq. 1)$$

Somando 1 em ambos membros na equação 1, obtemos:

$$T_n + 1 = 2T_{n-1} + 1 + 1$$
$$T_n + 1 = 2(T_{n-1} + 1)$$

Fazendo $J_n = T_n + 1$, obtemos:

$$J_n = 2J_{n-1}$$

que define uma progressão geométrica de razão 2 e termo inicial $J_1 = 2$. Portanto, $J_n = 2^n$, daí segue que:

$$T_n = 2^n - 1$$

Dessa forma, para resolver o problema para 5 discos, precisamos de 32 movimentos.

$$T_5 = 2^5 - 1 = 32$$

DOI: 10.47682/2675-6552.v1n1p73-81 - ISSN: 2675-6552

2.2. A TAXONOMIA DE BLOOM

O uso de materiais concretos no ensino de matemática, por um lado, permite aos alunos experiências reais à medida que este tem contado com os materiais, ora realizando medições, ora descrevendo, ou comparando com outros de mesma natureza. Por outro lado, permite-lhes também experiências no campo do raciocínio lógico por meio das diversas maneiras de representação que possibilitam abstrações empíricas e abstrações reflexivas, podendo evoluir para generalizações mais complexas como no caso do Princípio da Indução Finita. Com isso, estudos acadêmicos que abordam os temas educação matemática e jogos são comuns em âmbito nacional e internacional.

No Brasil, existem artigos publicados sobre o uso de jogos aplicados na educação matemática, embora não haja nenhum estudo que tenha analisado, de forma sistemática, essa produção científica. Motivado pelo interesse de preencher essa lacuna, o presente projeto se utilizará das bases da Taxonomia de Bloom para identificar a evolução das habilidades relativas ao Princípio da Indução Finita. A Taxonomia de Bloom vem sendo aplicada para validar e dar suporte ao desenvolvimento de estratégias de ensino em diversas áreas do conhecimento.

Em Mortara *et al.* (2003) podemos encontramos uma aplicação para validar a capacidade de um jogo em transmitir conhecimento para um grupo de alunos.

3. PROCESSOS METODOLÓGICOS/MATERIAIS E MÉTODOS

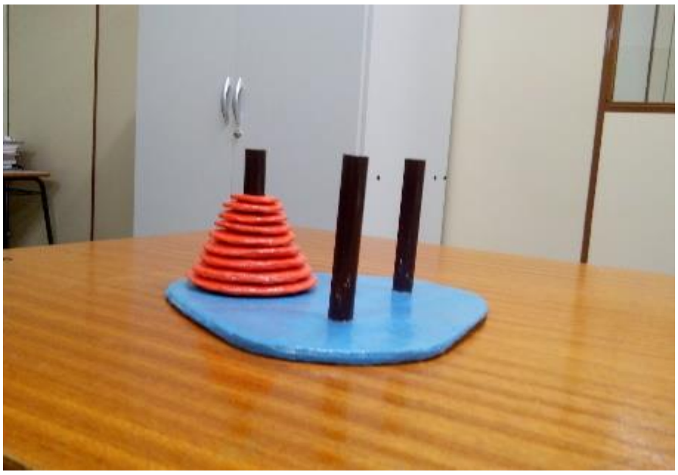
Para o desenvolvimento da pesquisa foi necessário o desenvolvimento de duas etapas: 1) construção do recurso didático, Torre da Hanói, para que pudesse ser utilizado pelos alunos envolvidos na pesquisa. 2) Construção do instrumento de mensuração da aprendizagem nos diversos níveis da Taxinomia de Bloom.

Na primeira etapa, foram desenvolvidos os materiais que seriam utilizados para utilização por parte dos alunos da amostra. Durante o desenvolvimento desses materiais didáticos, o Laboratório de Matemática do IFES/Campus Cariacica recebeu diversas peças da Torre de Hanói que foram utilizadas pelos alunos testados neste estudo.

Esse jogo é apresentado de maneira lúdica, como uma lenda ocorrida em um mosteiro na Índia. Nele deparamos com uma necessidade da construção de um método para resolver problemas: iniciando de casos mais simples em seguida construir possíveis generalizações. Neste jogo, inventado pelo matemático francês Edouard Lucas em 1833, o objetivo é passar os discos organizados em ordem crescente de tamanho (raio), de cima para baixo, de uma haste para outra, na mesma ordem, e efetuando o menor número de movimentos possíveis. Duas regras devem ser seguidas: 1) apenas um disco pode ser movimentado por vez; 2) ele não pode ser colocado sobre um disco menor (menor raio). Uma imagem ilustrativa do jogo é apresentada na Figura 3.

DOI: 10.47682/2675-6552.v1n1p73-81 - ISSN: 2675-6552

Figura 3: Torre de Hanói.



Fonte: Arquivo dos autores

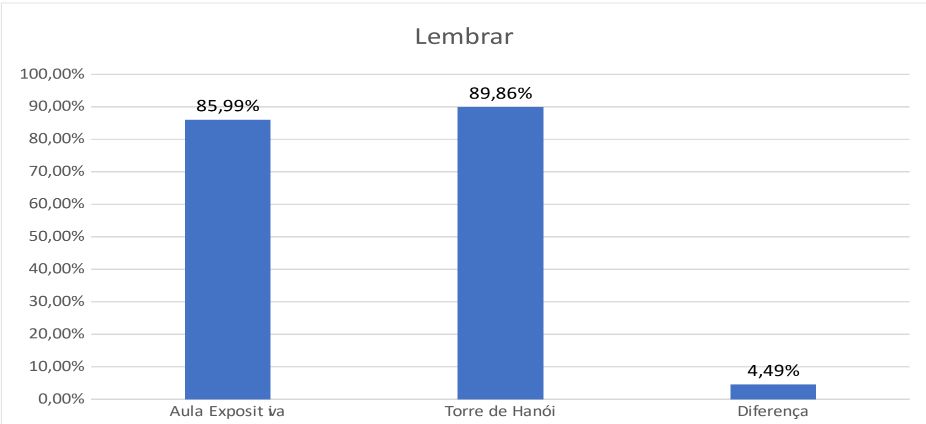
Na segunda etapa, foi desenvolvido o instrumento de coleta de dados, a fim de verificar o efeito da Torre de Hanói, como recurso didático, sobre a aprendizagem do Princípio da Indução Finita nos três primeiros níveis da Taxonomia de Bloom: lembrar; entender; aplicar. Esse instrumento foi aplicado em dois momentos: 1 – Após a aula expositiva do princípio da indução. 2 – Após a utilização da Torre de Hanói.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

A utilização de recursos didáticos para o ensino da matemática é um tema bastante pesquisado. Segundo Cunha (1989), o bom professor é aquele que tem desenvolvimento em duas direções do saber: domina o conteúdo que ministra e domina técnicas que facilitam o aprendizado por parte dos estudantes. A utilização eficaz de recursos didáticos faz parte do domínio das técnicas que facilitam o aprendizado por parte dos estudantes.

Neste estudo, foi testada a eficácia do recurso didático, Torre de Hanói, para o ensino do princípio da indução, conteúdo da disciplina matemática. Para verificar essa eficácia, os alunos foram testados em dois momentos: após uma aula expositiva e, em um segundo momento, após o uso da Torre de Hanói. Os resultados obtidos são apresentados nos Gráficos 1, 2 e 3.

Gráfico 1: Evolução do nível "lembrar".

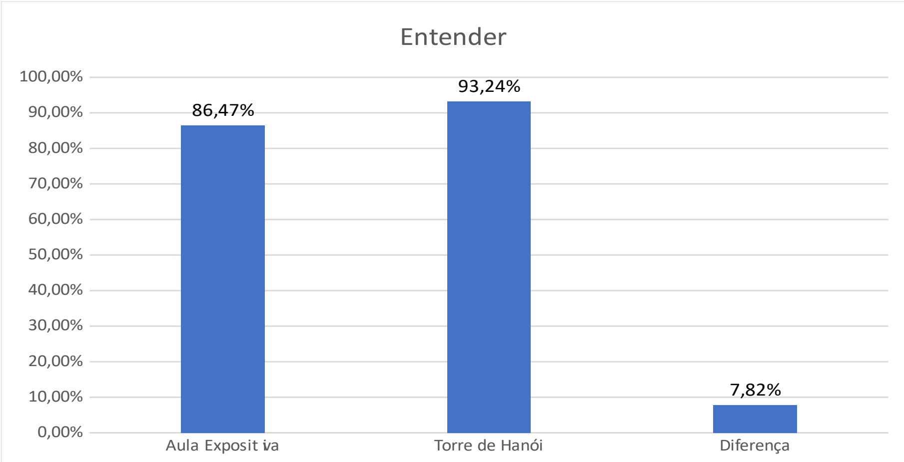


Fonte: dados da pesquisa.

DOI: 10.47682/2675-6552.v1n1p73-81 - ISSN: 2675-6552

Segundo Silva e Martins (2014), o nível "lembrar", na Taxonomia de Bloom, refere-se à capacidade de busca por uma informação relevante memorizada. Entre os estudantes testados, houve um crescimento de 4,49% no desempenho de acertos de questões desenvolvidas para verificar o nível "lembrar".

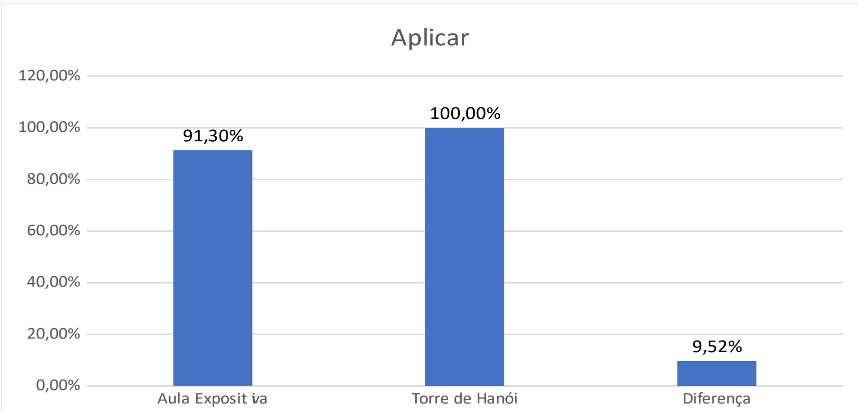
Gráfico 2: Evolução do nível "entender".



Fonte: dados da pesquisa.

Segundo Silva e Martins (2014), o nível "entender", na Taxonomia de Bloom, refere-se à capacidade de estabelecer ligações entre o novo aprendizado e o conhecimento previamente adquirido. Entre os estudantes testados, houve um crescimento de 7,82% no desempenho de acertos de questões desenvolvidas para verificar o nível "entender".

Gráfico 3: Evolução do nível "aplicar".



Fonte: dados da pesquisa.

Segundo Silva e Martins (2014), o nível "aplicar", na Taxonomia de Bloom, refere-se à capacidade de executar um procedimento numa situação específica e pode também abordar a aplicação de um conhecimento numa situação nova. Entre os estudantes testados, houve um crescimento de 9,52% no desempenho de acertos de questões desenvolvidas para verificar o nível "aplicar".

DOI: 10.47682/2675-6552.v1n1p73-81 - ISSN: 2675-6552

5 CONCLUSÕES

O presente artigo estudou a aprendizagem do princípio da indução finita através do instrumento didático torre de Hanói, utilizando as bases da taxonomia de Bloom para identificação das habilidades desenvolvidas.

De acordo com o referencial teórico apresentado sobre a torre de Hanói e a taxonomia de Bloom, os resultados mostraram uma evolução significativa nos níveis “lembrar”, “entender” e “aplicar” na comparação das aulas expositiva sobre o princípio da indução com a aula onde foi usada a torre de Hanói.

Os resultados mostraram que a evolução do nível “lembrar” foi de 4,49%, do nível “entender” de 7,82% e do nível “aplicar” de 9,52%.

Os resultados sugerem que o uso de um material concreto, no caso o jogo torre de Hanói, facilitou a aprendizagem do conteúdo por parte dos estudantes.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio. Brasília: MEC/SEMTEC, 1999.

FERRAZ, A. P. C.; BELHOT, R. V. Taxonomia de Bloom: revisão teórica e apresentação das adequações do instrumento para definição de objetos instrucionais. Gest. Prod. v.17, n.2, p. 421-431, São Paulo, 2010.

FREIRE, P. Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa. 43. ed. São Paulo: Paz e Terra, 2011.

GROUWS, D. A. A history of research in mathematics education. Handbook of research on mathematics teaching and learning. Macmillan, p. 3-35, New York, 1992.

KILPATRICK, J. Fincando estacas: uma tentativa de demarcar a EM como campo profissional e científico. Zetetiké, FE-Unicamp, v.4, n.5, p. 99-120, jan-jun, Campinas, 1996.

KILPATRICK, J.; RICO. L.; GOMES, P. Investigación en educación matemática: su historia y alguns temas de actualidad. Educación Matemática: México: Grupo Editorial Iberoamérica & una empresa docente, p. 1-18, 1994.

MILIES, C. P.; COELHO, S. P. Números: uma introdução à matemática. 3 ed. Editora da Universidade de São Paulo. São Paulo, 2001.

MORTARA, Michela et al. Evaluating the effectiveness of serious games for cultural awareness: the Icura user study. In: International Conference on Games and Learning Alliance. Springer International Publishing, p. 276-289, 2013.

SCHUBRING, G. O primeiro movimento internacional de reforma curricular em matemática e o papel da Alemanha: um estudo de caso na transição e conceitos. Zetetiké. CEMPEM-FE – Unicamp, v7, n.11, p. 29-50. Campinas, 1999.

WYNN, K. Children’s understanding of counting. n. 36, p. 155-193, 1990.

DOI: 10.47682/2675-6552.v1n1p73-81 - ISSN: 2675-6552